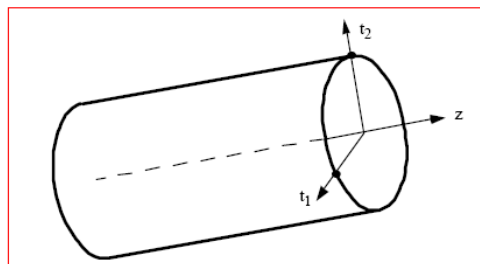


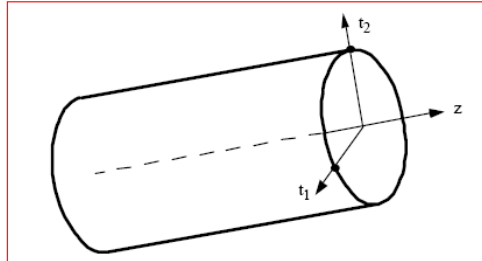
Modes de Propagation

Propagation guidée



On parle de propagation guidée pour des ondes se propageant le long d'une structure invariante dans le plan transverse à la direction de propagation

Propagation guidée



Pour tout vecteur $\mathbf{v}(t_1, t_2, z)$,
On peut écrire:
 $\mathbf{v}(t_1, t_2, z) = v_z(t_1, t_2, z)\mathbf{z} + \mathbf{v}_t(t_1, t_2, z)$

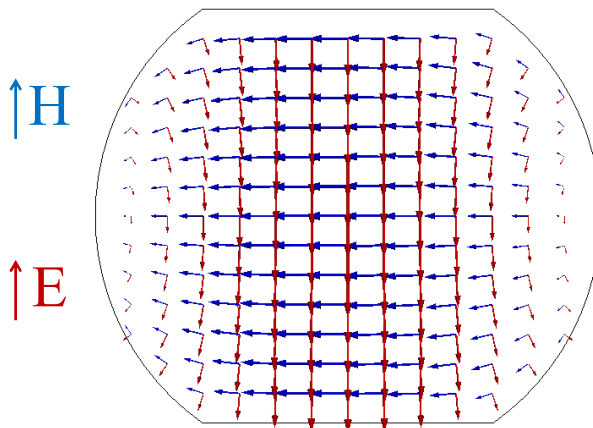
v_z est la composante longitudinale, $\mathbf{v}_t$ le vecteur transverse

L'opérateur vectoriel devient:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} + \nabla_t$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \nabla_t^2$$

Propagation guidée

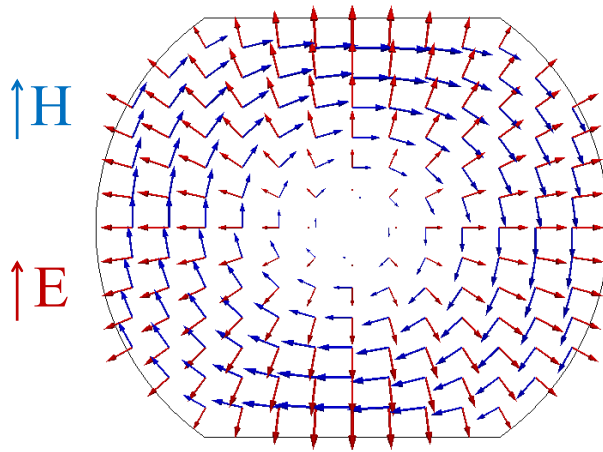


Conditions aux limites
pour un CEP

$$\mathbf{E}^{\parallel} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B}^{\perp} = \mathbf{0}$$

Propagation guidée



Conditions aux limites:

$$\mathbf{E}^{\parallel} = 0$$

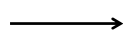
$$\mathbf{B}^{\perp} = 0$$

Propagation guidée

Equation d'onde (domaine temporel):

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial T^2} = 0$$

Transformée de
Fourier



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}; \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}; T) \cdot e^{-j\omega T} dT$$

1er
terme:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}; T)] dT = \nabla^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}; T) dT = \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}; \omega)$$

2nd
terme:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}; T)}{\partial T^2} \right] e^{-j\omega T} dT = \dots = -\omega^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}; T) dT = -\omega^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}; \omega)$$

Equation d'onde (domaine fréquentiel.):

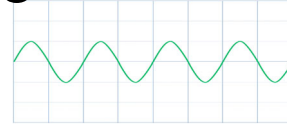
$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Propagation guidée

Signaux
harmoniques:

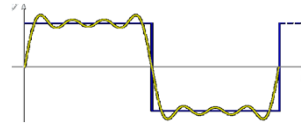
$$\tilde{\mathbf{E}}(t_1, t_2, z; T) = \mathbf{E}(t_1, t_2, z; \omega) \cdot e^{j\omega T}$$



freq. simple

Signaux généraux:

$$\tilde{\mathbf{E}}(t_1, t_2, z; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(t_1, t_2, z; \omega) \cdot e^{j\omega T} d\omega$$



*Une infinité
de fréquences.*

Propagation guidée

Toute fonction $f(t_1, t_2, z) = E_z, E_{t1}, E_{t2}, H_z, H_{t1}, H_{t2}$
sera considérée comme le produit (séparation des
variables):

$$f(t_1, t_2, z) = T(t_1, t_2)Z(z)$$

L'équation d'onde devient:

$$(\nabla^2 + k^2)f = 0$$

$$(\nabla^2 + k^2)T(t_1, t_2)Z(z) = 0$$

$$\nabla_t^2 T(t_1, t_2)Z(z) + T(t_1, t_2) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k^2 T(t_1, t_2)Z(z) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla_t^2 T}{T} + k^2 + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Propagation guidée

Cette relation doit être valable pour tout (t_1, t_2, z) , donc

$$\frac{\nabla_t^2 T}{T} + k^2 = -\gamma^2$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2$$

La dépendance longitudinale a une solution analytique simple :

$$Z(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{+\gamma z}$$

Il s'agit de la superposition d'une progressive et d'une onde rétrograde

Propagation guidée

γ : coefficient de propagation longitudinal

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

α : atténuation linéique [Neper/m] ou [dB/m]

β : déphasage linéique [rad/m]

Propagation guidée

Dans le cas où on ne considère que des ondes progressives, $B=0$.
On peut écrire les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ de la manière suivante

$$\mathbf{E}(t_1, t_2, z) = \mathbf{e}(t_1, t_2) e^{-\gamma z} = (\mathbf{e}_z \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{e}_t) e^{-\gamma z}$$

$$\mathbf{H}(t_1, t_2, z) = \mathbf{h}(t_1, t_2) e^{-\gamma z} = (\mathbf{h}_z \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{h}_t) e^{-\gamma z}$$

La partie transverse va évidemment dépendre de la géométrie transverse du guide

Dépendance transverse

$$(\nabla_t^2 + k^2 + \gamma^2) \mathbf{e} = (\nabla_t^2 + k_c^2) \mathbf{e} = 0$$

$$(\nabla_t^2 + k^2 + \gamma^2) \mathbf{h} = (\nabla_t^2 + k_c^2) \mathbf{h} = 0$$

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2$$

Les valeurs admissibles pour k_c sont les **valeurs propres** du guide, les vecteurs $\mathbf{e}$ et $\mathbf{h}$ correspondent les **modes propres** ou **modes** du guide

Constante de propagation longitudinale

Une constante de propagation correspond à chaque valeur propre:

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

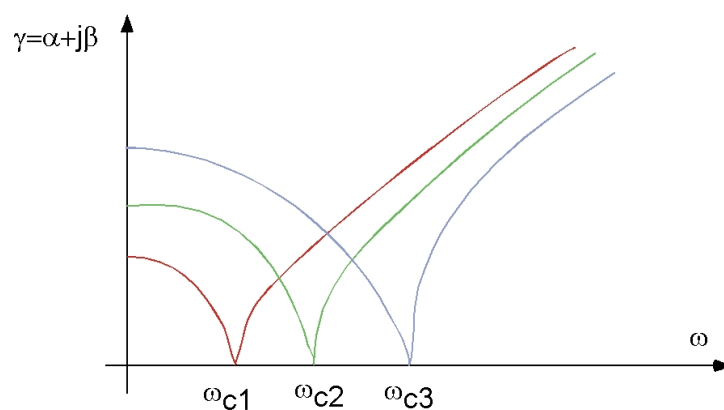
Ainsi, dans un cas sans pertes, la constante de propagation en fonction de la relation entre k (nombre de d'onde) et k_c peut être réelle ou imaginaire

$$\text{si } k_c > \omega \sqrt{\epsilon \mu} \text{ alors } \gamma = \alpha$$

$$\text{si } k_c = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \text{ alors } \gamma = 0$$

$$\text{si } k_c < \omega \sqrt{\epsilon \mu} \text{ alors } \gamma = j\beta$$

Diagramme de dispersion



Propagation guidée

Les 6 composantes des champs ne sont pas indépendantes, the six composants
Des modes non plus. En effet, par les équations de Maxwell, nous pouvons écrire:

$$\nabla_t \times \mathbf{e}_t = -j\omega\mu(h_z \hat{\mathbf{z}})$$

$$\nabla_t \times \mathbf{h}_t = j\omega\varepsilon(e_z \hat{\mathbf{z}})$$

Nous obtenons finalement (après quelques calculs ☺) :

$$k_c^2 \mathbf{e}_t = -\gamma \nabla_t e_z + j\omega\mu \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t h_z$$

$$k_c^2 \mathbf{h}_t = -\gamma \nabla_t h_z - j\omega\varepsilon \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t e_z$$

Propagation guidée

Donc, pur un problème donné, il est suffisant de
calculer e_z et h_z . Les autres composants seront
obtenus par les équations de Maxwell

Stratégie

1. Calculer e_z et h_z en résolvant: $(\nabla_t^2 + k_c^2)e_z = 0 ; (\nabla_t^2 + k_c^2)h_z = 0$
2. Calculer la constant de propagation longitudinale. Pour une onde progressive, choisir la racine avec $\text{Im}(\gamma) > 0$ $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{k_c^2 - k^2}$
3. Calculer les composantes transverses des modes $k_c^2 \mathbf{e}_t = -\gamma \nabla_t e_z + j\omega\mu \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t h_z$
 $k_c^2 \mathbf{h}_t = -\gamma \nabla_t h_z - j\omega\varepsilon \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t e_z$
4. Reconstruire les champs électromagnétiques $\mathbf{E}(t_1, t_2, z) = (e_z \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{e}_t) e^{-\gamma z}$
5. Obtenir les résultats pour l'onde rétrograde, en remplaçant γ by $-\gamma$ $\mathbf{H}(t_1, t_2, z) = (h_z \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{h}_t) e^{-\gamma z}$

Equation de Helmholtz

$$(\nabla_t^2 + k_c^2)e_z = 0 ; (\nabla_t^2 + k_c^2)h_z = 0$$

	TEM Mode	TM or E Modes	TE or H Modes	Hybrid Modes
e_z	0	not 0	0	not 0
h_z	0	0	not 0	not 0

Examples

- Câbles coaxiaux : TEM, TE, TM
- Fibres optiques: modes hybrides
- Guides d'ondes : TE, TM

Mode TEM

- Equation caractéristique :

$$e_z = h_z = 0$$

- Seconde étape:

$$k_c^2 \mathbf{e}_t = -\gamma \nabla_t e_z + j\omega\mu \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t h_z = 0$$

$$k_c^2 \mathbf{h}_t = -\gamma \nabla_t h_z - j\omega\epsilon \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t e_z = 0$$

Mode TEM

↗ Deux solutions :

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{h}_t = 0 \text{ (trivial)}$$

$$k_c = 0 \Rightarrow \gamma = jk = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

Mode TEM

↗ Résolution des équations de Maxwell:

$$\nabla_t \times \mathbf{e}_t = 0 \quad - \gamma \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_t = -j\omega\mu\mathbf{h}_t$$

$$\nabla_t \times \mathbf{h}_t = 0 \quad - \gamma \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h}_t = j\omega\varepsilon\mathbf{e}_t$$

↗ Equation de Laplace:

$$\mathbf{e}_t = -\nabla_t V \quad \text{with} \quad \nabla_t^2 V = 0$$

Mode TEM

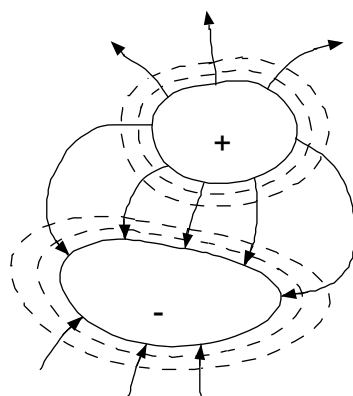
➤ Le champ magnétique est obtenu par:

$$\mathbf{h}_t = \frac{\gamma}{j\omega\mu} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_t = \frac{j\omega\epsilon}{\gamma} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_t$$

➤ L'impédance d'onde est donnée par:

$$Z_{\text{mod}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Mode TEM



$$\begin{aligned} V &= \int_{+}^{-} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ I &= \oint_{C+} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \\ Z_c &= \frac{V}{I} \end{aligned}$$

Mode TEM

- Définition univoque du courant et de la tension
- Champs identiques aux champs statiques
- Fréquence de coupure nulle
- Nécessite au moins deux conducteurs séparés

Le modèle de lignes de transmission classique
est en fait une solution en mode TEM

Modes TM

- L'équation caractéristique à résoudre est :

$$\left(\nabla_t^2 + k_c^2\right)e_z = 0$$

- Les autres composantes sont obtenues par:

$$k_c^2 \mathbf{e}_t = -\gamma \nabla_t e_z \quad \mathbf{h}_t = \frac{j\omega\epsilon}{\gamma} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_t$$

Modes TM

➤ Le coefficient de propagation longitudinal est donné par:

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \epsilon \mu}$$

➤ Impédance d'onde:

$$Z_{\text{mod}} = \frac{|\mathbf{e}_t|}{|\mathbf{h}_t|} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = \frac{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - k_c^2}}{\omega\epsilon}$$

Modes TE

➤ L'équation caractéristique à résoudre est :

$$\left(\nabla_t^2 + k_c^2\right)h_z = 0$$

➤ Les autres composantes sont obtenues par:

$$k_c^2 \mathbf{h}_t = -\gamma \nabla_t h_z \quad \mathbf{e}_t = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \mathbf{h}_t \times \hat{\mathbf{z}}$$

TE modes

➤ Le coefficient de propagation longitudinal est donné par:

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \epsilon \mu}$$

➤ Impédance d'onde:

$$Z_{\text{mod}} = \frac{|\mathbf{e}_t|}{|\mathbf{h}_t|} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - k_c^2}}$$

Coefficient de propagation longitudinal

$$\gamma = \alpha + j\beta = k_c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} = \frac{\omega_c}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

Vitesse de groupe

$$v_g = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)^{-1} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2}$$

Vitesse de phase

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2}}$$

Longueur d'onde guidée

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_c^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

avec

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$$

	TEM Modes	TM Modes	TE Modes
Basic equation	$\nabla_t^2 V = 0$	$(\nabla_t^2 + k_c^2)E_z = 0$	$(\nabla_t^2 + k_c^2)h_z = 0$
γ	$\sqrt{-\omega^2 \epsilon \mu} = j\omega\sqrt{\epsilon \mu}$	$\sqrt{k_c^2 - \omega^2 \epsilon \mu}$	$\sqrt{k_c^2 - \omega^2 \epsilon \mu}$
E_z	0	$e_z e^{-\gamma z}$	0
H_z	0	0	$h_z e^{-\gamma z}$
$\mathbf{E}_t$	$-\nabla_t V e^{-\gamma z}$	$-\left(\frac{\gamma}{k_c^2}\right) \nabla_t E_z$	$\left(\frac{j\omega\mu}{\gamma}\right) (\mathbf{H}_t \times \hat{\mathbf{z}})$
$\mathbf{H}_t$	$\left(\frac{\gamma}{j\omega\mu}\right) (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t)$	$\left(\frac{j\omega\epsilon}{\gamma}\right) (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t)$	$-\left(\frac{\gamma}{k_c^2}\right) \nabla_t H_z$
$Z_{\text{mod}} = \mathbf{e}_t / \mathbf{h}_t $	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\frac{\sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - k_c^2}}{\omega \epsilon}$	$\frac{\omega \mu}{\sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - k_c^2}}$

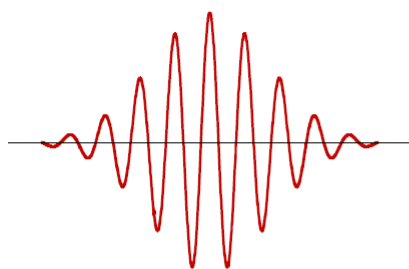
Dispersion et distorsion (1)

Lorsque un **déphasage linéique** β est une fonction **non linéaire** de la fréquence, on dit que la propagation est **dispersive**.
Les guides d'ondes et les fibres optiques supportent de modes dispersifs
Lorsqu'un signal se propage dans un mode **dispersif**, il subit une **distorsion**.



Cet effet est illustré par le cas de la propagation d'une **impulsion Gaussienne**, un cas où les développements mathématiques ne sont pas trop complexes

Dispersion et distorsion (2)



Impulsion Gaussienne modulée

$$f(t, z=0) = \cos(\omega_0 t) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$$

Où 2τ est la **largeur de l'impulsion** au niveau $\frac{1}{\sqrt{e}} = 0.606$ du maximum

La **transformée de Fourier** d'une **impulsion Gaussienne** possède aussi une **dépendance Gaussienne**:

$$E(\omega, z=0) = \tau\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[\tau(\omega-\omega_0)]^2}$$

Dispersion et distortion (3)

Le signal se propage le long de la ligne **dispersive**, et subit un **déphasage** βz .

$$F(\omega, z) = \tau \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[\tau(\omega - \omega_0)]^2} e^{-j\beta z}$$

La fonction correspondante dans le domaine temporel est trouvée en prenant la **transformée de Fourier inverse**

$$f(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega, z) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\tau \sqrt{2\pi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}[\tau(\omega - \omega_0)]^2} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} d\omega$$

Mais β n'est pas une fonction simple de ω , cette intégrale ne peut donc pas être évaluée simplement

Dispersion et distortion (4)

Le spectre de l'impulsion est généralement à bande étroite, nous pouvons donc prendre **un développement en série de Taylor de $\beta(\omega)$ autour de ω_0**

$$\beta = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad \text{avec} \quad \beta_0 = \beta(\omega_0) \quad \text{et} \quad \beta_n = \left. \frac{\partial^n \beta}{\partial \omega^n} \right|_{\omega = \omega_0}$$

Le terme **sous l'intégrale** prend la forme

$$e^{-\frac{1}{2}[\tau(\omega - \omega_0)]^2} e^{-j[\beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2]z} e^{j\omega t}$$

En regroupant les termes en ω , nous obtenons $e^{j\omega t} e^{-j\beta_1 \omega z} = e^{j\omega t'}$,
avec, $t' = t - \beta_1 z$ ce qui correspond à une translation avec une
vitesse $v_g = 1/\beta_1$ (vélocité de groupe)

Dispersion et distortion (5)

En regroupant **les termes** en $(\omega - \omega_0)^2$, nous obtenons

$$e^{-\frac{1}{2}[\tau(\omega - \omega_0)]^2 - j\left[\frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2\right]z} = e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2}[\tau^2 + j\beta_2 z]} = e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2 \tau_e^2}{2}}$$

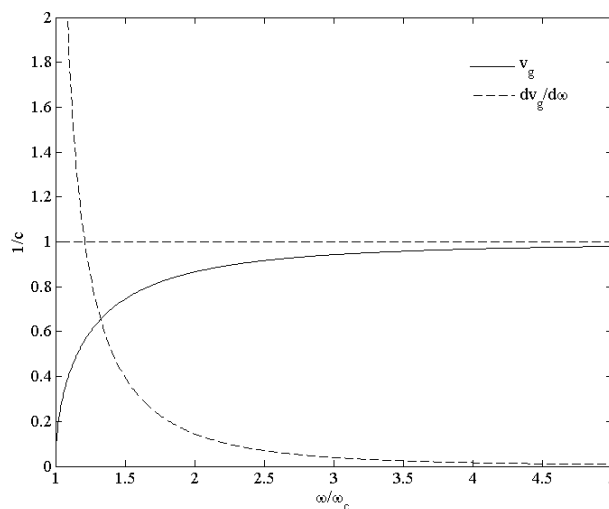
En prenant la transformée de Fourier inverse et en faisant quelques approximations, nous trouvons que la largeur de l'impulsion de vient

$$\tau' \cong \frac{|\tau_e^2|}{\tau} = \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\beta_2 z}{\tau}\right)^2}$$

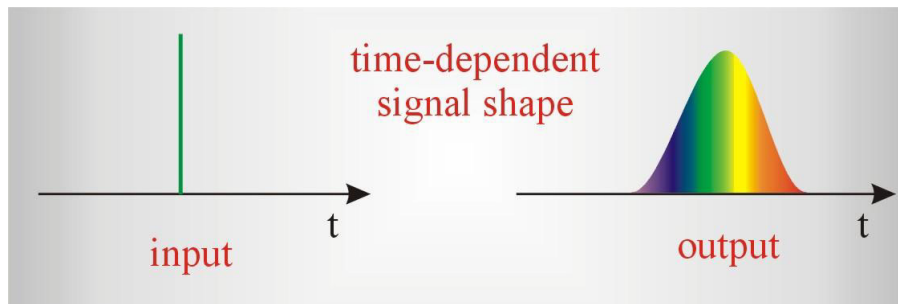
A une grande distance z , si le terme dispersif β_2 est important, nous tendons vers $\tau' = \beta_2 z / \tau$. Donc une impulsion étroite en $z=0$ s'élargira plus rapidement qu'une impulsion plus large

$$\beta_2 = -\frac{dv_g/d\omega}{v_g^2}$$

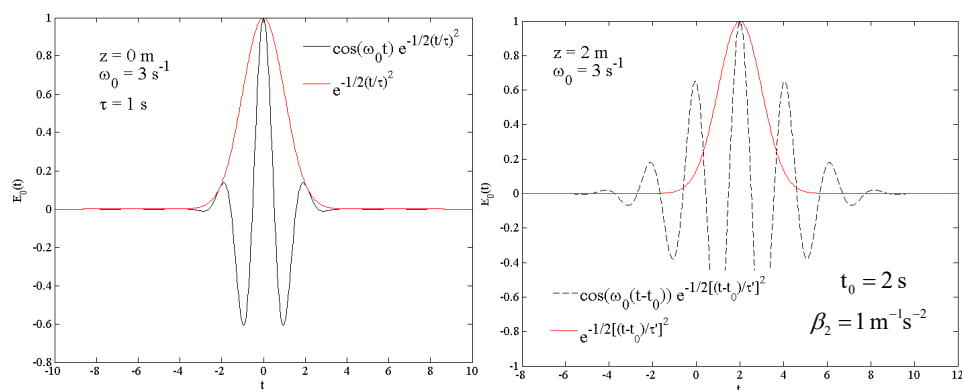
Dispersion and distortion (6)



Dispersion and distortion (7)

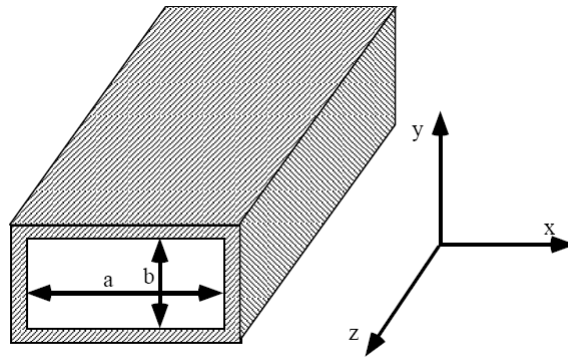


Dispersion and distortion (8)



$$\tau' = \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\beta_2 z}{\tau}\right)^2}$$

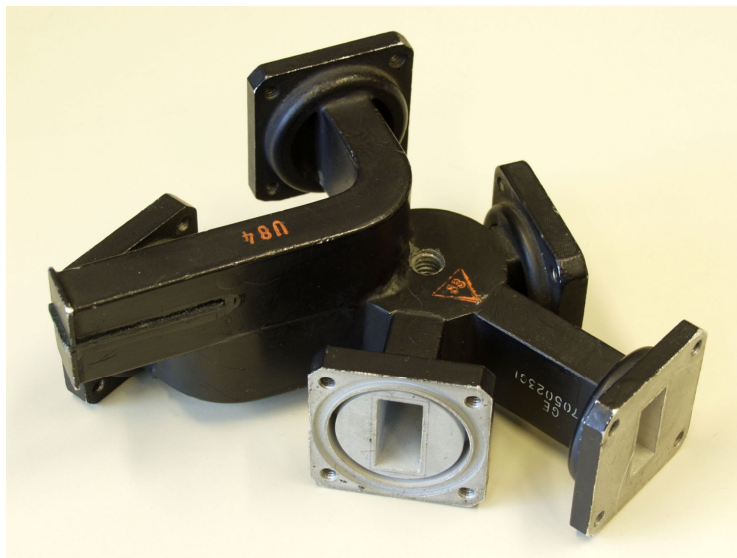
Guide d'onde rectangulaire



Guide d'onde rectangulaire



Guide d'onde rectangulaire



45 MAG-EPFL

Guide d'onde rectangulaire



46 MAG-EPFL

Guide d'onde rectangulaire: Mode TEM

Nous devons résoudre l'équation de Laplace

$$\nabla_t^2 V = 0$$

Sujette aux conditions aux limites suivantes

$$V|_{x=0, x=a, y=0, y=b} = cte$$

Comme les parois du guide sont connexes, $V = cte$

et $\mathbf{e}_t = \nabla_t V = 0$

Pas de Mode TEM

Guide d'onde rectangulaire: Modes TM

Equation de base $(\nabla_t^2 + k_c^2) \mathbf{e}_z = \frac{\partial^2 \mathbf{e}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{e}_z}{\partial y^2} + k_c^2 \mathbf{e}_z = 0$

Séparation des variables $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_{zx}(x) \mathbf{e}_{zy}(y)$

Ainsi $\frac{d^2 \mathbf{e}_{zx}}{dx^2} \frac{1}{\mathbf{e}_{zx}} + \frac{d^2 \mathbf{e}_{zy}}{dy^2} \frac{1}{\mathbf{e}_{zy}} = -k_c^2$

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{-k_x^2} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{-k_y^2}$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$$

Guide d'onde rectangulaire: Modes TM

Nous devons résoudre $\frac{d^2 e_{zx}}{dx^2} \frac{1}{e_{zx}} = -k_x^2$, $\frac{d^2 e_{zy}}{dy^2} \frac{1}{e_{zy}} = -k_y^2$, $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$

Solutions :

$$e_{zx} = A \cos k_x x + B \sin k_x x$$

$$e_{zy} = C \cos k_y y + D \sin k_y y$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$$

Ainsi :

$$e_z = (A \cos k_x x + B \sin k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y)$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$$

Guide d'onde rectangulaire: Modes TM

Les constants A, B, C, D, k_x et k_y sont obtenues en utilisant les conditions aux limites :

$$e_z|_{x=0} = 0 \Rightarrow (A \cos k_x 0 + \cancel{B \sin k_x 0})(C \cos k_y y + D \sin k_y y) = 0$$

Ainsi A= 0

$$e_z|_{y=0} = 0 \Rightarrow (A \cos k_x x + B \sin k_x x)(C \cos k_y 0 + \cancel{D \sin k_y 0}) = 0$$

Ainsi C= 0

Guide d'onde rectangulaire: Modes TM

$$e_z|_{x=a} = 0 \Rightarrow E_o \sin k_x a \sin k_y y = 0$$

Ainsi $k_x = m\pi/a$

$$e_z|_{y=b} = 0 \Rightarrow E_o \sin k_x x \sin k_y b = 0$$

Ainsi $k_y = n\pi/b$

avec $mn \neq 0$

Guide d'onde rectangulaire: Modes TM

Finalement $e_z = E_o \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$

et $E_z = E_o \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z}$

avec $\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2}$

Guide d'onde rectangulaire: Modes TE

Equation de base $(\nabla_t^2 + k_c^2)h_z = \frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2} + k_c^2 h_z = 0$

séparation des variables $h_z = h_{zx}(x)h_{zy}(y)$

ainsi $\frac{d^2 h_{zx}}{dx^2} \frac{1}{h_{zx}} + \frac{d^2 h_{zy}}{dy^2} \frac{1}{h_{zy}} = -k_c^2$

$$\begin{array}{cc} \text{↪} & \text{↪} \\ -k_x^2 & -k_y^2 \end{array} \quad k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$$

Guide d'onde rectangulaire: Modes TE

Nous devons résoudre $\frac{d^2 h_{zx}}{dx^2} \frac{1}{h_{zx}} = -k_x^2$, $\frac{d^2 h_{zy}}{dy^2} \frac{1}{h_{zy}} = -k_y^2$, $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$

Solutions :

$$h_{zx} = A \cos k_x x + B \sin k_x x$$

$$h_{zy} = C \cos k_y y + D \sin k_y y$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$$

Ainsi :

$$h_z = (A \cos k_x x + B \sin k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y)$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$$

Guide d'onde rectangulaire: Modes TE

Les conditions aux limites sont appliquées sur le champ électrique

$$e_x = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial h_z}{\partial y} = -\frac{j\omega\mu k_y}{k_c^2} (A \cos k_x x + B \sin k_x x) (-C \sin k_y y + D \cos k_y y)$$

$$e_y = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial h_z}{\partial x} = -\frac{j\omega\mu k_x}{k_c^2} (-A \sin k_x x + B \cos k_x x) (C \cos k_y y + D \sin k_y y)$$

$$e_x|_{y=0, y=b} = 0 \quad \text{ainsi} \quad D = 0 \quad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

$$m + n \neq 0$$

$$e_y|_{x=0, x=a} = 0 \quad \text{ainsi} \quad B = 0 \quad k_x = \frac{m\pi}{a}$$

Guide d'onde rectangulaire: Modes TE

Finalement

$$h_z = H_o \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y$$

$$H_z = H_o \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z}$$

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \epsilon \mu}$$

Guide d'onde rectangulaire

	TM Modes	TE Modes
k_c	$\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad mn \neq 0$	$\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad m+n \neq 0$
ω_c	$\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$
α	$k_c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}, \quad \omega < \omega_c$	$k_c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}, \quad \omega < \omega_c$
β	$k \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}, \quad \omega > \omega_c$	$k \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}, \quad \omega > \omega_c$

Guide d'onde rectangulaire

	TM Modes	TE Modes
Ez	$E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z}$	0
H _z	0	$H_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z}$

Guide d'onde rectangulaire

	TM Modes	TE Modes
Ex	$-\frac{\gamma m \pi}{a k_c^2} E_0 \cos \frac{m \pi}{a} x \sin \frac{n \pi}{b} y e^{-\gamma z}$	$\frac{j \omega \epsilon n \pi}{b k_c^2} H_0 \cos \frac{m \pi}{a} x \sin \frac{n \pi}{b} y e^{-\gamma z}$
Ey	$-\frac{j n \pi}{b k_c^2} E_0 \sin \frac{m \pi}{a} x \cos \frac{n \pi}{b} y e^{-\gamma z}$	$-\frac{j \omega \epsilon m \pi}{a k_c^2} H_0 \sin \frac{m \pi}{a} x \cos \frac{n \pi}{b} y e^{-\gamma z}$
Hx	$\frac{j \omega \epsilon n \pi}{b k_c^2} E_0 \sin \frac{m \pi}{a} x \cos \frac{n \pi}{b} y e^{-\gamma z}$	$\frac{\gamma m \pi}{a k_c^2} H_0 \sin \frac{m \pi}{a} x \cos \frac{n \pi}{b} y e^{-\gamma z}$
Hy	$-\frac{j \omega \epsilon m \pi}{a k_c^2} E_0 \cos \frac{m \pi}{a} x \sin \frac{n \pi}{b} y e^{-\gamma z}$	$\frac{\gamma n \pi}{b k_c^2} H_0 \cos \frac{m \pi}{a} x \sin \frac{n \pi}{b} y e^{-\gamma z}$
Z	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$	$\frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$

Guide d'onde rectangulaire

Les modes TE et TM ne peuvent se propager que quand

$$\omega > \omega_c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \sqrt{\left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b}\right)^2}$$

Mode dominant

La fréquence de coupure pour les deux familles de mode est donnée par

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Mais avec

Modes TM
 $mn \neq 0$

Modes TE
 $m + n \neq 0$

Mode dominant

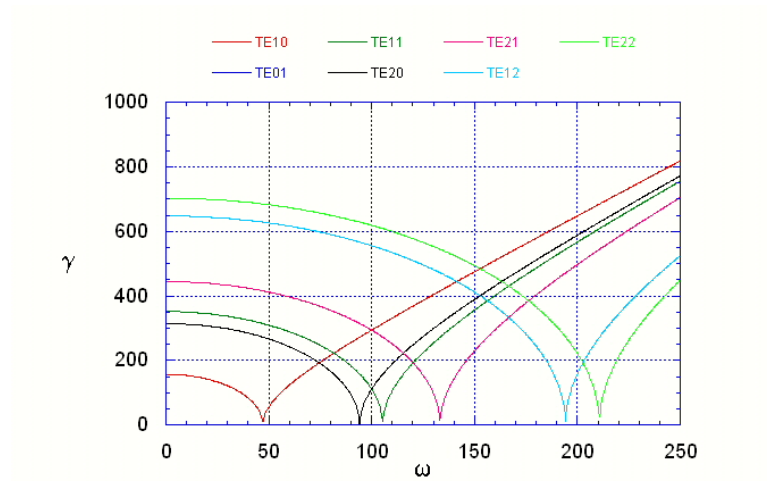
Ainsi, la fréquence de coupure la plus basse possible correspond
Au mode TE_{10} :

$$f_c|_{TE_{10}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\pi}{a} = \frac{c}{2a}$$

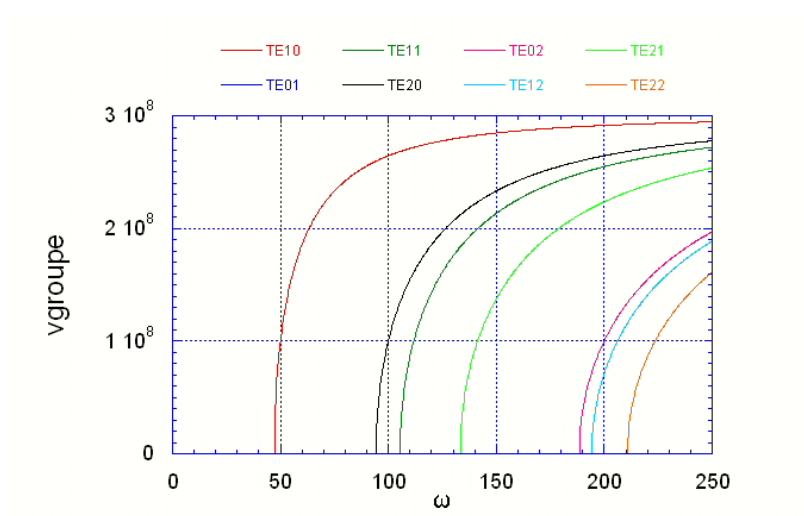
Le premier modes supérieur est donné par

$$f_c|_{TE_{20}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\pi}{a} = \frac{c}{a} \quad \text{or} \quad f_c|_{TE_{01}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\pi}{b} = \frac{c}{2b}$$

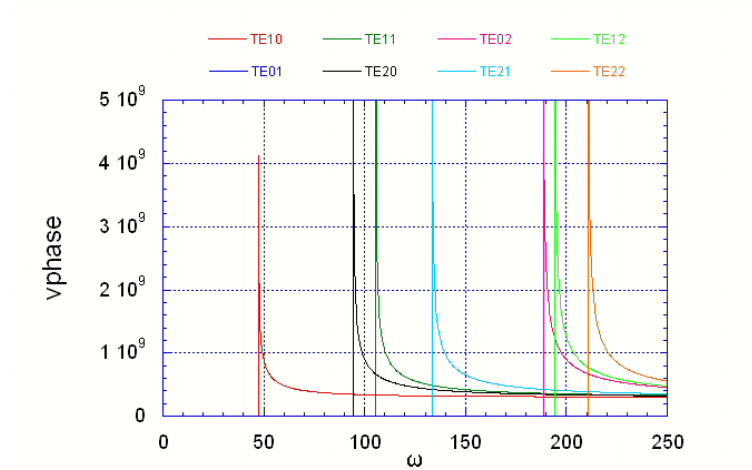
Diagramme de dispersion



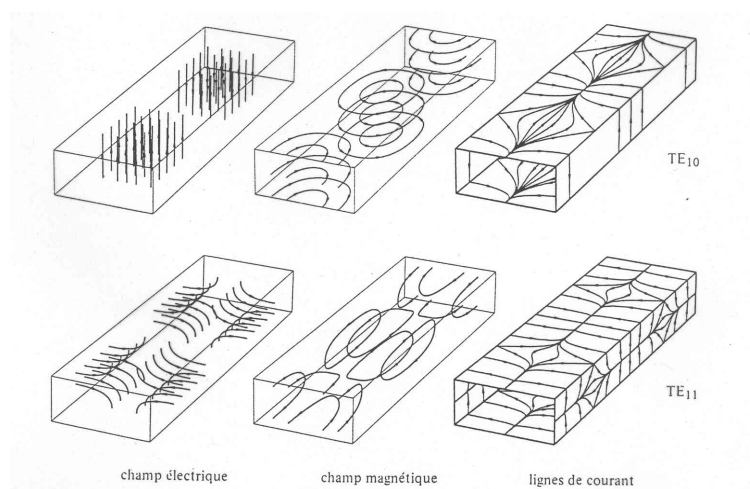
Vitesse de groupe



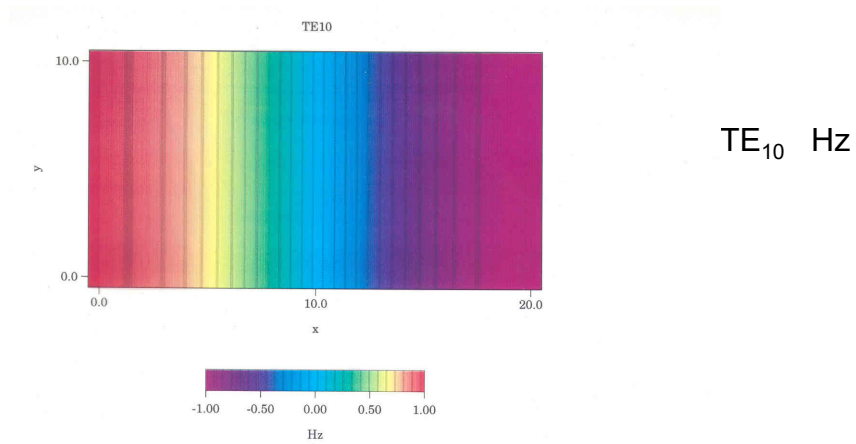
Vitesse de phase



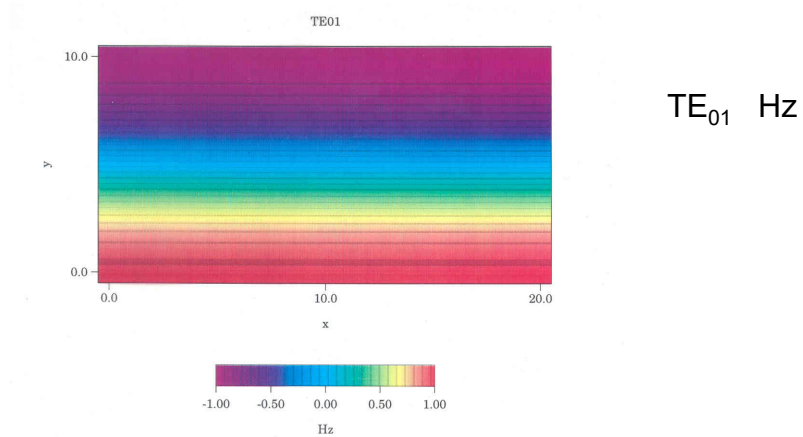
Distribution des champs



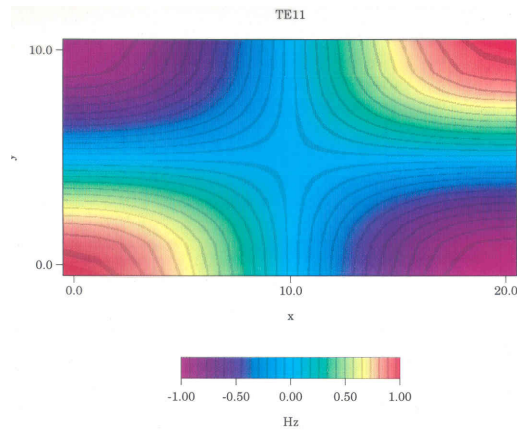
Distribution des champs



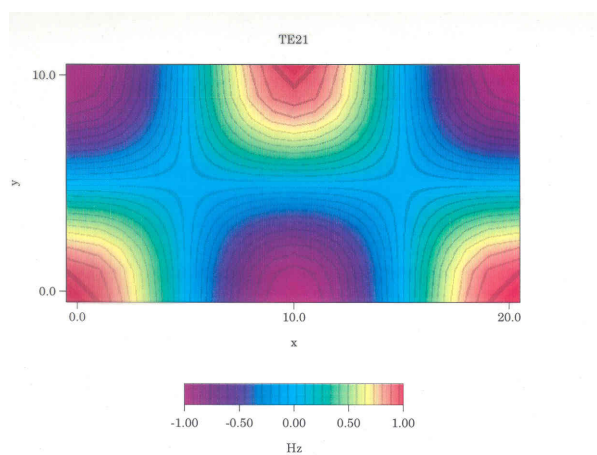
Distribution des champs



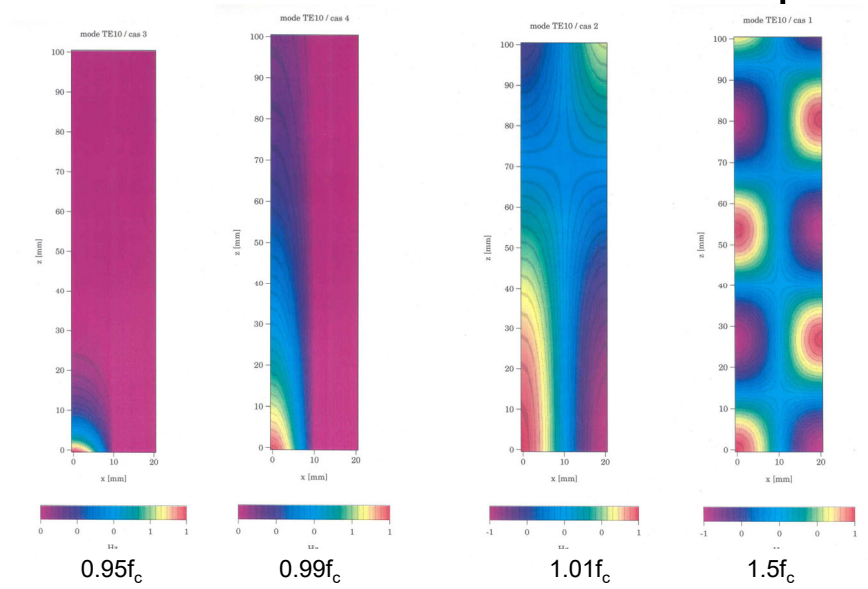
Distribution des champs

 TE_{11} Hz

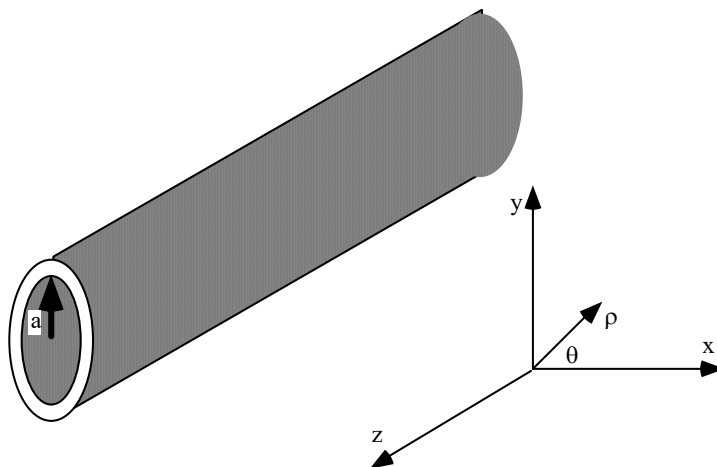
Distribution des champs

 TE_{21} Hz

Distribution des champs



Guide circulaire



Guide circulaire

A cause de la symétrie circulaire du problème, Nous allons utiliser des coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}
 e_\rho &= \frac{-1}{k_c^2} \left[\gamma \frac{\partial e_z}{\partial \rho} + \frac{j\omega\mu}{\rho} \frac{\partial h_z}{\partial \varphi} \right] \\
 e_\varphi &= \frac{1}{k_c^2} \left[-\frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial e_z}{\partial \varphi} + j\omega\mu \frac{\partial h_z}{\partial \rho} \right] \\
 h_\rho &= \frac{1}{k_c^2} \left[\frac{j\omega\varepsilon}{\rho} \frac{\partial e_z}{\partial \varphi} - \gamma \frac{\partial h_z}{\partial \rho} \right] \\
 h_\varphi &= \frac{-1}{k_c^2} \left[j\omega\varepsilon \frac{\partial e_z}{\partial \rho} + \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial h_z}{\partial \varphi} \right]
 \end{aligned}
 \quad k_c^2 = \gamma^2 + k_0^2 = k_0^2 - \beta^2$$

Modes TM

➤ Equation d'onde en coordonnées cylindriques

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k_c^2 \right) e_z = 0$$

➤ Séparation des variables

$$e_z(\rho, \varphi) = R(\rho)P(\varphi)$$

Modes TM

Ainsi
$$\frac{\rho^2}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} + \rho^2 k_c^2 = -\frac{1}{P} \frac{d^2 P}{d\varphi^2}$$

Qui devient

$$-\frac{1}{P} \frac{d^2 P}{d\varphi^2} = k_\varphi^2, \quad \frac{d^2 P}{d\varphi^2} + P k_\varphi^2 = 0$$

$$\frac{\rho^2}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} + \rho^2 k_c^2 = k_\varphi^2, \quad \rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + R(\rho^2 k_c^2 - k_\varphi^2) = 0$$

Modes TM

Solution de l'équation en φ :

$$P(\varphi) = A \sin k_\varphi \varphi + B \cos k_\varphi \varphi$$

La solution doit être périodique en φ , donc k_φ est un nombre entier

$$P(\varphi) = A \sin n\varphi + B \cos n\varphi$$

Modes TM

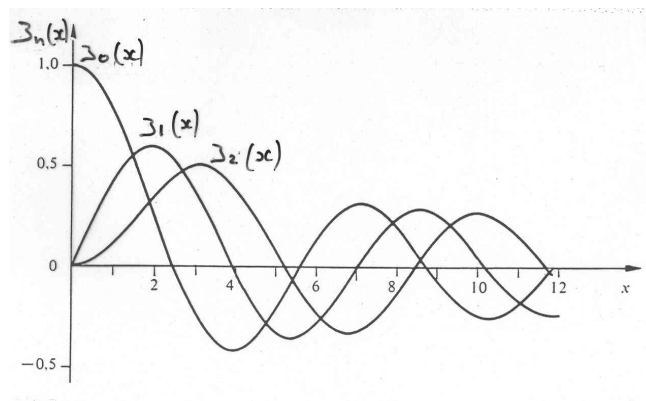
L'équation en ρ prend la forme d'une équation de Bessel:

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + R(\rho^2 k_c^2 - n^2) = 0$$

A laquelle les solutions sont données par

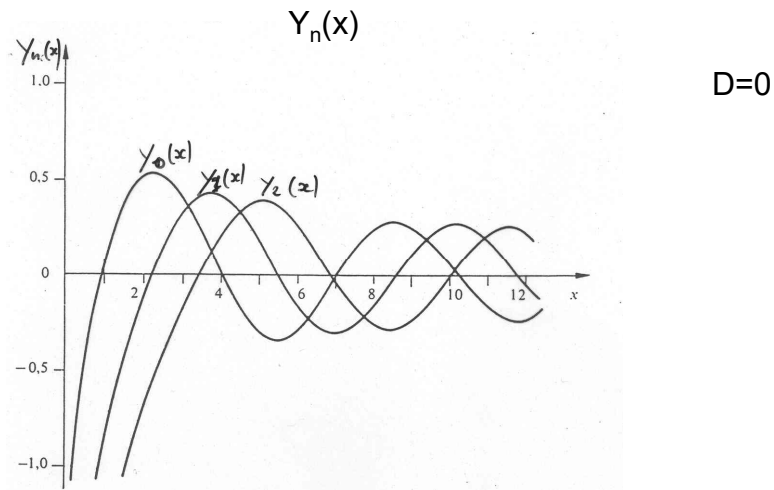
$$R(\rho) = C J_n(k_c \rho) + D Y_n(k_c \rho)$$

Fonctions de Bessel du premier type



$J_n(x)$

Fonctions de Bessel du second type



Modes TM

Ainsi

$$e_z(\rho, \varphi) = J_n(k_c \rho) (A \sin n\varphi + B \cos n\varphi)$$

Condition en $\rho=a$:

$$e_z|_{\rho=a} = J_n(k_c a) (A \sin n\varphi + B \cos n\varphi) = 0$$

Donc $k_{cnm} = \frac{p_{nm}}{a}$ où p_{nm} est le zero d'ordre m de la fonction de Bessel J_n

Modes TM

Coefficient de propagation

$$\beta_{nm} = \sqrt{k_0^2 - k_c^2} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{p_{nm}}{a}\right)^2}$$

Fréquence de coupure

$$f_{c_{nm}} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{p_{nm}}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Modes TE

En faisant la même analyse que pour les modes TM on écrit

$$h_z(\rho, \varphi) = J_n(k_c \rho) (A \sin n\varphi + B \cos n\varphi)$$

Les conditions aux limites s'appliquent sur le champ électrique:

$$e_\varphi(\rho, \varphi) = \frac{j\omega\mu}{k_c} (A \sin n\varphi + B \cos n\varphi) J'_n(k_c \rho)$$

où
$$e_\varphi|_{\rho=a} = \frac{j\omega\mu}{k_c} J'_n(k_c a) (A \sin n\varphi + B \cos n\varphi) = 0$$

Modes TE

Ainsi $k_{cnm} = \frac{p'_{nm}}{a}$ où p'_{nm} est le zéro d'ordre m de la dérivée de la fonction de Bessel du premier type J'_n

Le coefficient de propagation est donné par

$$\beta_{nm} = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p'_{nm}}{a}\right)^2}$$

Et la fréquence de coupure par $f_{c_{nm}} = \frac{p'_{nm}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}}$

Guides circulaires

	Modes TM	Modes TE
k_c	$\frac{p_{nm}}{a}$	$\frac{p'_{nm}}{a}$
ω_c	$\frac{p_{nm}}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$	$\frac{p'_{nm}}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$
α	$k_c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}, \omega < \omega_c$	$k_c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}, \omega < \omega_c$
β	$k \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}, \omega > \omega_c$	$k \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}, \omega > \omega_c$

Guides circulaires

Ez	$J_n(k_c \rho)(A \sin n\varphi + B \cos n\varphi)e^{-\gamma z}$	0
Hz	0	$J_n(k_c \rho)(A \sin n\varphi + B \cos n\varphi)e^{-\gamma z}$

Guides circulaires

E ρ	$-\frac{\gamma}{k_c}(A \sin n\varphi + B \cos n\varphi)J'_n(k_c \rho)e^{-\gamma z}$	$-\frac{j\omega\mu n}{k_c^2 \rho}(A \cos n\varphi - B \sin n\varphi)J_n(k_c \rho)e^{-\gamma z}$
E φ	$-\frac{\gamma n}{k_c^2 \rho}(A \cos n\varphi - B \sin n\varphi)J_n(k_c \rho)e^{-\gamma z}$	$\frac{j\omega\mu}{k_c}(A \sin n\varphi + B \cos n\varphi)J'_n(k_c \rho)e^{-\gamma z}$
H ρ	$\frac{j\omega\varepsilon n}{k_c^2 \rho}(A \cos n\varphi - B \sin n\varphi)J_n(k_c \rho)e^{-\gamma z}$	$-\frac{\gamma}{k_c}(A \sin n\varphi + B \cos n\varphi)J'_n(k_c \rho)e^{-\gamma z}$
H φ	$\frac{j\omega\varepsilon}{k_c}(A \sin n\varphi + B \cos n\varphi)J'_n(k_c \rho)e^{-\gamma z}$	$-\frac{\gamma n}{k_c^2 \rho}(A \cos n\varphi - B \sin n\varphi)J_n(k_c \rho)e^{-\gamma z}$
Z	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$	$\frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$

Mode dominant

Modes TE $f_{c_{nm}} = \frac{p'_{nm}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}}$

n	p'n1	p'n2	p'n3
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970
3	4.2012	6.0152	11.3459
4	5.3175	9.2824	12.6819
5	6.4156	10.5199	13.9872
6	7.5013	11.7349	15.2682

Modes TM $f_{c_{nm}} = \frac{p_{nm}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}}$

n	pn1	pn2	pn3
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620
3	6.38016	9.76102	13.01520
4	7.58834	11.06471	14.37254
5	8.77142	12.33860	15.70017
6	9.93611	13.58929	17.0038

Mode dominant

Mode TE₁₁

$$f_{c_{nm}} = \frac{1.841}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}}$$

Premier mode supérieur

Modes TE $f_{c_{nm}} = \frac{p'_{nm}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}}$

n	p'n1	p'n2	p'n3
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970
3	4.2012	6.0152	11.3459
4	5.3175	9.2824	12.6819
5	6.4156	10.5199	13.9872
6	7.5013	11.7349	15.2682

Modes TM $f_{c_{nm}} = \frac{p_{nm}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}}$

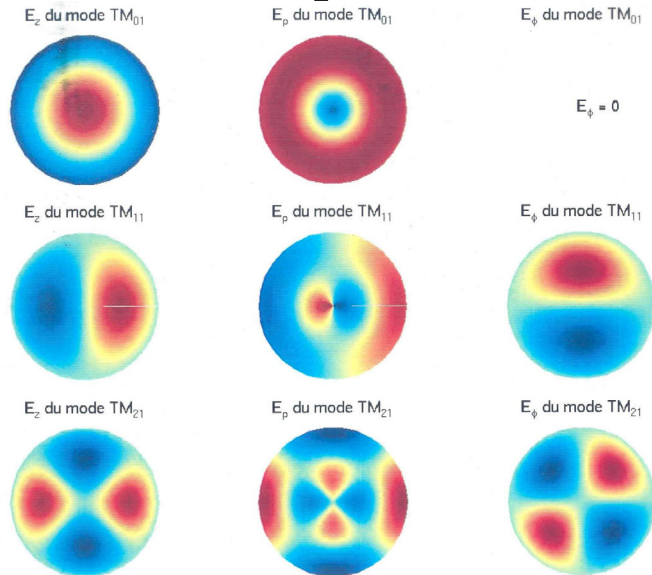
n	pn1	pn2	pn3
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620
3	6.38016	9.76102	13.01520
4	7.58834	11.06471	14.37254
5	8.77142	12.33860	15.70017
6	9.93611	13.58929	17.0038

Premier mode supérieur

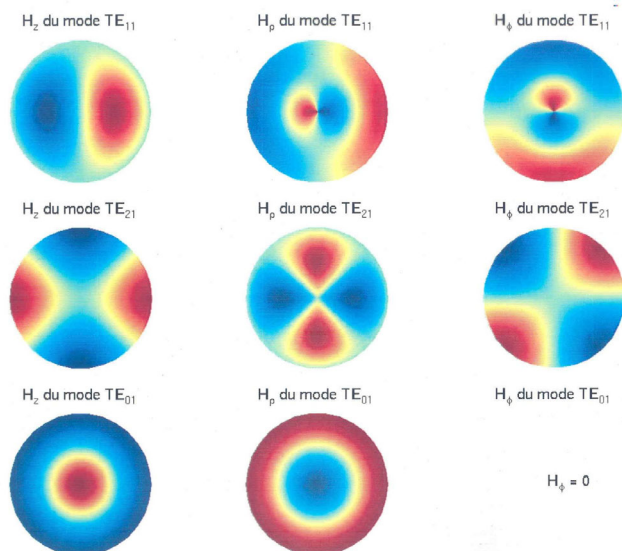
Mode TM₀₁

$$f_{c_{nm}} = \frac{2.405}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}}$$

Champs de modes TM



Champs des modes TE



Constante de propagation longitudinale

Une constante de propagation correspond à chaque valeur propre:

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

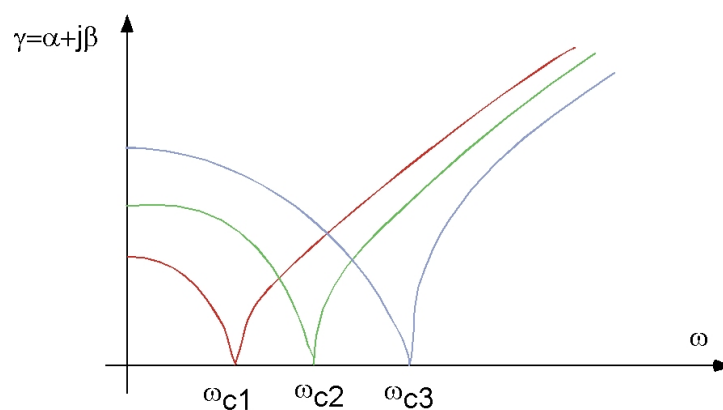
Ainsi, dans un cas sans pertes, en fonction de la relation entre k et k_c , la constante de propagation longitudinale peut être réelle ou imaginaire

$$\text{si } k_c > \omega \sqrt{\epsilon \mu} \text{ alors } \gamma = \alpha$$

$$\text{si } k_c = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \text{ alors } \gamma = 0$$

$$\text{si } k_c < \omega \sqrt{\epsilon \mu} \text{ alors } \gamma = j\beta$$

Diagramme de dispersion



Constante de propagation longitudinale

$$\gamma = \alpha + j\beta = k_c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} = \frac{\omega_c}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

Vitesse de groupe

$$v_g = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right)^{-1} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

Vitesse de phase

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$$

Longueur d'onde guidée

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_c^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

Avec

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$$